DINÀMICA 3: Els teoremes de transformació

A) El teorema de les forces vives

Fins ara hem resolt problemes en què les forces eren constants. Era fàcil de respondre l'interrogant de "com es mou un cos", és a dir, quina posició té a cada instant. Com que coneixíem les forces, podíem amb la 2^a llei, calcular l'acceleració *a* i, amb les fórmules de la cinemàtica del MRUV, sabíem a cada instant *t* la posició *x* la velocitat *v*.

Però ara ens trobem que les forces són variables i això ja no es pot fer. Per exemple, quan un cos es mou pel camp gravitatori, lluny de la superfície de la terra o una partícula carregada va per un camp elèctric variable, llavors les forces depenen de la posició i com que el cos es mou, les forces canvien.

Ens cal introduir noves magnituds i, basant-nos en la 2^a llei, trobar noves lleis, que ara en direm *teoremes* perquè totes són deduïdes matemàticament de la 2^a llei de Newton que és el tronc d'on surten totes les branques de l'arbre de la dinàmica.

El treball i l'energia cinètica: Dues noves magnituds

Suposem que una força constant *F* mou un cos per un pla horitzontal sense fregament al llarg d'un espai Δx.

Definim **el treball W** com

"la magnitud que resulta de multiplicar la força F per l'espai recorregut Δx."

La seva fórmula serà: $\boxed{W = F \cdot \Delta x}$

i les seves unitats: *[unitats de treball]= [unitat de força]·[unitat d'espai] = N·m = J = joules*

Ara l'energia **cinètica U_c**:
Com que, per poder simplificar el raonament, hem suposat que la força era constant, el cos es mourà amb un MRUV i podem escriure:

$$W = F \cdot \Delta x = ma \cdot \Delta x = ma\frac{v^2 - v_o^2}{2a} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_o^2 = U_c - U_{c,o} = \Delta U_c \qquad [1]$$

Hem fet *F = ma* (2^a llei) i hem calculat Δx amb la fórmula: $v^2 = v_o^2 + 2a\Delta x$

De l'expressió $\frac{1}{2}mv^2$ en diem **energia cinètica** U_c del cos: $\boxed{U_c = \frac{1}{2}mv^2}$

És una nova magnitud. Comprovem que les seves unitats són joules igual que el treball que l'ha produïda:

$$[unitats\ \ d'energia\ \ cinèt] = [unitats\ \ mv^2] = [unitats\ \ de\ \ massa] \cdot [unitats\ \ de\ \ velocitat]^2 = [kg] \cdot [\frac{m^2}{s^2}] = [kg\ \frac{m}{s^2}] \cdot [m] = N \cdot m = J$$

Si mirem a l'expressió [1] el treball que hem fet, podem escriure: $\boxed{W = \Delta U_c}$

Aquesta darrera expressió és **el teorema de les forces vives**: *"El treball fa variar l'energia cinètica del cos"*
Que es sol enunciar així:

> *"El treball fet a un cos lliure, [1] no es perd sinó que es transforma en energia cinètica i el cos la guarda de manera que aquest cos podrà tornar a fer el treball que ha rebut"*

Com es calcula el treball d'una força que varia amb la posició

Ja es veu de seguida que per fer servir la fórmula del treball: *W = F·Δx*, cal que la força *F* sigui constant. Quan la força és variable, per calcular el treball, cal recórrer al càlcul integral. El raonament és el següent. Imaginarem que el trajecte Δx al llarg del qual la força fa el treball, el dividim en un nombre infinit de trossos infinitament petits *dx* tant petits que es pot imaginar que quan la força en recorre'n un es manté constant. Llavors ja es pot calcular el treball fet a cada un d'aquests *dx* amb la fórmula d'abans. Aquest treball també serà infinitament petit *dW*.

$$dW = F \cdot dx$$

El treball total serà la suma d'aquests infinits treballs *dW* infinitament petits des de la posició inicial x_1 en què comença a actuar la força fins a la final x_2. D'això, en matemàtiques, se'n diu una integral definida.

$$\boxed{W = \int_{x_1}^{x_2} F \cdot dx}$$

Amb les fórmules que ens donen les matemàtiques podrem resoldre aquests problemes.

---

[1] Cos lliure vol dir que no rep cap altra força que la que li fem nosaltres. Si hi hagués hagut fregament, hauríem pogut calcular el treball amb la resultant, *F' = F – F_f*. Així *F'* és una força que fa treball a un cos lliure.

Ara farem servir aquest teorema per resoldre un exercici en què ens demanen la velocitat final que agafa un cos quan hi actua una força que varia segons la posició.

Exemple 1

Estirem un cos de 20 kg amb una força variable *F(x) = 800 – 80x* (en N i m) per un pla horitzontal. Hi ha un fregament de μ = 0,2. El cos té una velocitat inicial v_o = 16 m/s i la força la fem en la mateixa direcció que la velocitat. Calcula la velocitat quan hagi recorregut 8 m en els casos següents: a) La força té el mateix sentit que la velocitat inicial. b) La força té sentit contrari a la velocitat inicial.

Calculem primer la força de fregament: $F_f = \mu mg = 0{,}2 \cdot 20 \cdot 10 = 40 \ N$

La força que fa treball és la diferència: $F' = F - F_f = (800 - 4x) - 40 = 760 - 40x$

El treball que la força *F'* fa en un tros *dx* és: $dW = F' \cdot dx$ i el treball total serà la suma de tots aquests dW , és a dir, la integral:

$$W = \int_{x=0}^{x=8} dW = \int_{x=0}^{x=8} F'\,dx = \int_0^8 (760 - 80x)dx = \left[760x - 40x^2\right]_0^8 = (760 \cdot 8 - 40 \cdot 8^2) - (769 \cdot 0 - 40 \cdot 0^2) = 3.520 \ J$$ [2]

Ara ja sabem el treball que ha rebut el cos. Calculem l'energia cinètica inicial: $U_{c,o} = \frac{1}{2} m v_o^2 = \frac{1}{2} 20 \cdot 16^2 = 2.560 \ J$

i, amb el teorema de les forces vives, sabrem la final:

a) En el cas que la força tingui el mateix sentit que la velocitat

$$\boxed{W = \Delta U_c} \rightarrow W = U_c - U_{c,o} \rightarrow U_c = U_{c,o} + W = 2.560 + 3.520 = 6.080 \ J$$

I la velocitat: $U_c = \frac{1}{2} m v^2 \rightarrow v = \sqrt{\frac{2U_c}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6.080}{20}} = 24{,}66 \ m/s$

b) En el cas que la força vagi en sentit contrari a la velocitat. Ja veiem que aquí el treball que rep el cos li fa disminuir l'energia cinètica. Es sol dir que el treball és negatiu. L'energia cinètica final serà:

$U_c = U_{c,o} - W = 2.560 - 3.520 = -960 \ J$ (El signe negatiu aquí és simbòlic)

I la velocitat final: $v = \sqrt{\frac{2U_c}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 960}{20}} = -9{,}8 \ m/s$ serà en sentit contrari a la inicial.

B) El teorema de l'impuls i la quantitat de moviment

Quan una força actua al llarg d'un cert espai Δx com a l'exemple anterior, també ho fa, evidentment durant un cert temps Δt.. Abans sabíem com variava la força en funció de la posició *x*, ara considerarem el cas en què coneixem la força en funció del temps *t*. Com abans, necessitem introduir noves magnituds.

L'impuls i la quantitat de moviment: Dues noves magnituds

Suposem que una força constant *F* mou un cos per un pla horitzontal sense fregament durant un temps Δt.
Definim **l'impuls I** com

"la magnitud que resulta de multiplicar la força *F* pel temps que ha actuat Δt."

La seva fórmula serà: $\boxed{I = F \cdot \Delta t}$

i les seves unitats: *[unitats d'impuls] = [unitat de força]·[unitat de temps] = N·s*

Ara **la quantitat de moviment p**:
Com que, com abans amb el treball, per poder simplificar el raonament, hem suposat que la força era constant, el cos es mourà amb un MRUV i podem escriure:

$$I = F \cdot \Delta t = ma \cdot \Delta t = ma \frac{v - v_o}{a} = mv - mv_o = p - p_o = \Delta p \qquad [2]$$

Hem fet *F* = *ma* (2a llei) i hem calculat Δt amb la fórmula: $v = v_o + a \cdot \Delta t$

De l'expressió mv en diem quantitat de moviment *p* del cos: $\boxed{p = mv}$

---

[2] La integral d'una funció polinòmica es calcula amb la fórmula que ens dóna la funció primitiva: $\int x^n = \frac{x^{m+1}}{m+1}$. Ara s'ha de substituir la x pel seu valor final x_2 i després pel seu valor inicial x_1 i restar.

És una nova magnitud. Les seves unitats seran:

$$[unitats\ \ de\ \ quantitat\ \ de\ \ moviment] = [unitat\ \ de\ \ massa]\cdot[unitats\ \ de\ \ velocitat] = kg\cdot\frac{m}{s}$$

Comprovem que les unitats d'aquestes dues magnituds coincideixen:

$$[unitats\ \ d'impuls] = N\cdot s = [kg\,\frac{m}{s^2}]\cdot[s] = [kg\,\frac{m}{s^2}\,s] = kg\cdot\frac{m}{s} = [unitats\ \ de\ \ quantitat\ \ de\ \ moviment]$$

Si mirem a l'expressió [2], l'impuls que ha rebut el cos, podem escriure: $\boxed{I = \Delta p}$

Aquesta expressió és **el teorema de l'impuls i la quantitat de moviment**: i que s'expressa així:

"L'impuls que rep un cos li fa variar la quantitat de moviment"

Com es calcula el treball d'una força que varia amb el temps

Ja es veu de seguida que per fer servir la fórmula de l'impuls: $I = F\cdot\Delta t$, cal que la força F sigui constant. Quan la força és variable, per calcular l'impuls, cal recórrer al càlcul integral. El raonament és com el d'abans amb el treball. Imaginarem que el temps Δt durant el qual la força dóna l'impuls al cos, el dividim en un nombre infinit de trossos infinitament petits dt tant petits que es pot imaginar que en aquest infinitèssim de temps la força F s'ha mantingut constant. Llavors ja es pot calcular l'impuls fet a cada un d'aquests dt amb la fórmula d'abans. Aquest impuls també serà infinitament petit dI.

$$dI = F\cdot dt$$

L'impuls total serà la suma d'aquests infinits impulsos dI infinitament petits des de l'instant inicial t_1 en què comença a actuar la força fins al final t_2. Això, en matemàtiques se'n diu una integral definida.

$$\boxed{I = \int_{t_1}^{t_2} F\cdot dt}$$

Ja hem dit que amb les fórmules que ens donen les matemàtiques podrem resoldre aquests problemes.

Ara farem servir aquest teorema per resoldre un exercici en què ens demanen la velocitat final d'un cos quan hi actua una força que varia amb el temps.

Exemple 2

Estirem un cos de massa $m = 20\ kg$ amb una força variable $F(t) = 80 - 8t$ (en N i s) per un pla horitzontal. El cos té una velocitat inicial $v_o = 16\ m/s$ i la força la fem en la mateixa direcció i sentit que la velocitat. Calcula la velocitat al cap d'un temps $\Delta t = 4\ s$.

L'impuls que la força F dóna al cos en un temps dt és: $dI = F\cdot dt$ i l'impuls total serà la suma de tots aquests dI, és a dir, la integral:

$$I = \int_{t=0}^{t=4} dI = \int_{t=0}^{t=4} F\cdot dt = \int_0^4 (80 - 8t)dt = \left[80t - 4t^2\right]_0^4 = (80\cdot 4 - 4\cdot 4^2) - (80\cdot 0 - 4\cdot 0^2) = 256\ \ N$$

Ara ja sabem l'impuls que ha rebut el cos.

Calculem la quantitat de moviment inicial: $p_o = mv_o = 20\cdot 16 = 320\ \ N\cdot s$

i, amb el teorema, sabrem la final: $\boxed{I = \Delta p}$ → $I = p - p_o$ → $p = p_o + I = 320 + 256 = 576\ \ N$

I la velocitat: $\boxed{p = mv}$ → $v = \dfrac{p}{m} = \dfrac{576}{20} = 28{,}8\ \ m/s$

Demostració dels teoremes de transformació suposant que les forces són variables

Hem justificat la necessitat d'introduir els teoremes de transformació perquè, quan les forces eren variables, no podíem resoldre els problemes de dinàmica amb l'aplicació directa de la 2^a llei. Emperò la deducció d'aquests teoremes l'hem feta justament en el supòsit de què les forces fossin constants per tal de poder-ho fer a un nivell ben assequible. Ara cal fer la deducció rigorosa suposant que les forces són variables.

Teorema de les forces vives:

"El treball que rep un cos lliure li fa variar l'energia cinètica o es transforma en energia cinètica del cos"

$$El\ \ treball\ \ és: W = \int_{x_1}^{x_2} F \cdot dx \qquad La\ \ 2^a\ \ llei:\ \ F = ma$$ → $$W = \int_{x_1}^{x_2} ma \cdot dx \qquad l'acceleració: a = \frac{dv}{dt}$$ → $$W = \int_{x_1}^{x_2} m \frac{dv}{dt} \cdot dx = \int_{x_1}^{x_2} m \frac{dx}{dt} \cdot dv \qquad la\ \ velocitat: v = \frac{dx}{dt}$$ →

$$W = \int_{x_1}^{x_2} m \cdot v \cdot dv \qquad canvi\ \ de\ \ variables:$$ → $$W = \int_{v_1}^{v_2} m \cdot v \cdot dv \qquad fem\ \ la\ \ integral:$$ → $$W = [\frac{1}{2} mv^2]_{v_1}^{v_2} = \frac{1}{2} mv^2 - \frac{1}{2} mv^2 = U_{c,2} - U_{c,1} = \Delta U_c$$

Teorema de l'impuls i la quantitat de moviment:

"L'impuls que rep un cos li fa variar la quantitat de moviment o es transforma en quantitat de moviment del cos"

$$L'impuls\ \ és: I = \int_{t_1}^{t_2} F \cdot dt \qquad La\ \ 2^a\ \ llei:\ \ F = ma$$ → $$I = \int_{t_1}^{t_2} ma \cdot dt \qquad l'acceleració: a = \frac{dv}{dt}$$ → $$I = \int_{t_1}^{t_2} m \frac{dv}{dt} \cdot dt \qquad simplificant:$$ →

$$I = \int_{t_1}^{t_2} m \cdot dv \qquad canvi\ \ de\ \ variables:$$ → $$I = \int_{v_1}^{v_2} m \cdot dv \qquad fem\ \ la\ \ integral:$$ → $$I = [mv]_{v_1}^{v_2} = mv_2 - mv_1 = p_2 - p_1 = \Delta p$$
