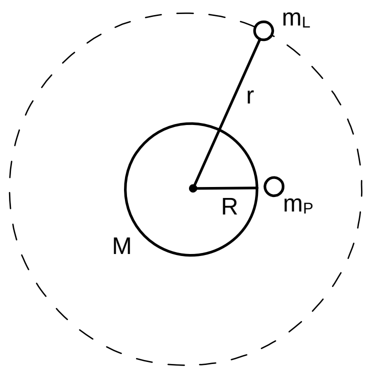
Llei de la gravitació universal

És el gran descobriment d'Isaac Newton (1642-1727). Mirem com ho va fer per trobar-la.

En aquella època hi havia dos interrogants:



- *Per què cauen els cossos?*
- *Com és que la lluna es manté dins de la seva òrbita?*

Newton veu que tots dos interrogants tenen la mateixa resposta:

"Perquè els cossos s'atreuen per raó de la seva massa"

- Si una poma cau, és perquè la massa *M* de la terra atreu la massa m_P de la poma. Aquesta atracció és *el pes*.
- Si la lluna fa un moviment circular uniforme és perquè la massa M de la terra atreu la massa m_L de la lluna. Aquesta atracció és *la força centrípeta* necessària per mantenir-la en òrbita fent un moviment circular al voltant de la terra.

Quins coneixements d'aquella època va necessitar Newton per deduir la llei

A l'època de Newton, es coneixia amb molta aproximació:

- El valor de la gravetat a *la superfície* de la terra ($g = 9,8\ m/s^2$). És l'acceleració amb que la poma cau.
- El radi de la terra o distància del centre a *la superfície* ($R_T = 6.400\ km$).

  (Eratòstenes, 200 anys a C, va trobar la longitud de la circunferència terrestre: 252.000 estadis)
- La distància de la terra a *la lluna* ($r = 60 \cdot R = 384.000\ km$).
- El temps que tarda *la lluna* a fer una volta a la terra. ($T = 27'3$ *dies*).

Com troba la fórmula per calcular la força amb què s'atreuen dues masses

Newton parteix de la hipòtesi de què es pot considerar que la terra atreu la poma i la lluna com si tota la massa de la terra estigués concentrada en un punt en el seu centre. [1]

Després calcula l'acceleració centrípeta amb què la lluna es mou al voltant de la terra:

$$a_n = \omega^2 r = \frac{4\pi^2}{T^2} r = \frac{4\pi^2}{(27{,}3 \bullet 24 \bullet 60 \bullet 60)^2} 3{,}84 \bullet 10^8 = 0{,}00272\ \ m/s^2$$

Llavors es troba que sap:

L'acceleració, $g = 9,8\ m/s^2$, que la terra produeix a la distància $R = 6.400\ km$ i

L'acceleració, $a_n = 0,00272\ m/s^2$, que la terra produeix a la distància $r = 384.000\ km$

Ara divideix aquestes acceleracions: $\left(\dfrac{a\ \ la\ \ distància\ \ R}{a\ \ la\ \ distància\ \ r}\right) \rightarrow \dfrac{g}{a_n} = \dfrac{9{,}8}{0{,}00272} \approx 3.600$

i les distàncies al centre de la terra: $\left(\dfrac{distància\ \ r}{distància\ \ R}\right) \rightarrow \dfrac{r}{R} = \dfrac{384.000}{6.400} = \dfrac{60R}{R} = 60$

Comparant aquests dos resultats, troba la relació: $\dfrac{g}{a_n} = \dfrac{r^2}{R^2}$ que ens diu que:

Les acceleracions produïdes per les forces d'atracció de la terra, són inversament proporcionals a les distàncies elevades al quadrat.

Suposem ara un cos qualsevol de massa *m.* Aquest cos el situem al lloc on és la lluna, és a dir, a la distància $r = 60R$ del centre de la terra, evidentment rebrà una acceleració a_n com la lluna. Després el situem a la superfície de la terra, és a dir, a la distància *R* del centre, aquí l'acceleració és *g*. Multipliquem el numerador i denominador de l'expressió anterior per la massa *m* d'aquest cos i obtenim les forces.

---

[1] Més endavant, Newton va demostrar la legitimitat d'aquesta hipòtesi. Per fer-ho, va necessitar el càlcul integral del qual ell va ser un dels descobridors

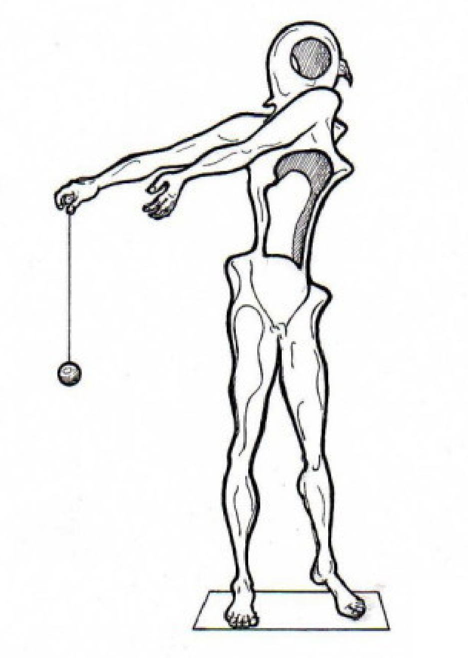
$$\frac{g}{a_n} = \frac{r^2}{R^2} \quad \rightarrow \quad \frac{mg}{ma_n} = \frac{r^2}{R^2} \quad \rightarrow \quad \frac{F_g\,(pes)}{F_n\,(f.\ centrípeta)} = \frac{r^2}{R^2}$$

Arriba al resultat de què les forces són inversament proporcionals a les distàncies elevades al quadrat.
A més, era evident, que les forces són proporcionals a les masses. Si la massa d'un cos és el doble que la d'un altre, el pes, la força amb què la terra l'atreu, és el doble.
Aquesta relació que va trobar entre la terra i la poma i entre la terra i la lluna, es pot generalitzar i aplicar-la a dos cossos qualssevol, enunciant la següent:

Llei de la gravitació universal

"Dos cossos qualssevol s'atrauen per raó de la seva massa amb una força que és proporcional a les masses i inversament proporcional a la distància elevada al quadrat"

La fórmula matemàtica és: $\boxed{F = G\dfrac{Mm}{r^2}}$


Issac Newton de Salvador Dalí
A la plaça del Museu de Figueres

en què *M* és la massa de la terra i *m* la de la lluna o la de la poma.

i per dos cossos qualssevol de masses m_1 i m_2: $\boxed{F = G\dfrac{m_1 m_2}{r^2}}$

La G és la constant de proporcionalitat: $G = 6{,}673 \cdot 10^{-11}\ N\ m^2/kg^2$

El valor de G el va trobar Cavendish l'any 1798. Així es va calcular la massa M de la terra.

Deducció de la tercera llei de Kepler

Johann Kepler (1571 – 1630) va trobar que les dades experimentals que es tenien dels radis dels planetes i els seus períodes de rotació complien la llei següent:

"els períodes dels planetes elevats al quadrat són proporcionals als radis de les seves òrbites elevats al cub" .

Newton va deduir teòricament aquesta tercera llei del sistema solar a partir de la segona llei de la dinàmica i de la llei de la gravitació universal. Mirem com ho va fer:

Indiquem amb M la massa del sol, m_1 i m_2 les masses de dos dels planetes i r_1 i r_2 els radis de les seves òrbites que suposem circulars.
Els planetes compleixen la 2ª llei: $F = ma$ i, com que és un moviment circular, l'única acceleració que tenen és la normal:

$a = \omega^2 r = \dfrac{4\pi^2}{T^2} r$ per tant, podem escriure així la **segona llei** per un planeta: $F = m\dfrac{4\pi^2}{T^2} r$

Aquesta força també compleix per la **llei de la gravitació**: $F = G\dfrac{Mm}{r^2}$.

Igualant aquests dos resultats i fent operacions, trobem: $GMT^2 = 4\pi^2 r^3$

Aplicant aquesta expressió a dos planetes qualsevol 1 i 2 i dividint els termes, ens surt la llei de Kepler:

$$\boxed{\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{r_1^3}{r_2^3}}$$

Això va donar un gran prestigi a Newton entre els científics de l'època.