

1. Un noi de $m = 50 \text{ kg}$ va en una vagoneta també de $M = 50 \text{ kg}$ a $V = 4 \text{ m/s}$. Ara salta endavant i de resultes del salt l'energia del conjunt augmenta en 200 J . Calcula la velocitat final v' del noi i velocitat final V' de la vagoneta després del salt.



Com que en el salt no hi ha forces exteriors, es conserva la quantitat de moviment del sistema. Escriurem que la quantitat de moviment inicial és igual que la final:

$$(M + m)V = MV' + mv' \rightarrow (50 + 50) \cdot 4 = 50V' + 50v' \rightarrow V' = 8 - v'$$

Si sabem que l'energia del sistema augmenta en $\Delta U = 200 \text{ J}$, podem escriure que l'energia final és igual a la inicial més l'augment:

$$\frac{1}{2}MV'^2 + \frac{1}{2}mv'^2 = \frac{1}{2}(M + m)V^2 + \Delta U \rightarrow \frac{1}{2}50V'^2 + \frac{1}{2}50v'^2 = \frac{1}{2}(50 + 50)V^2 + 200 \rightarrow V'^2 + v'^2 = 40$$

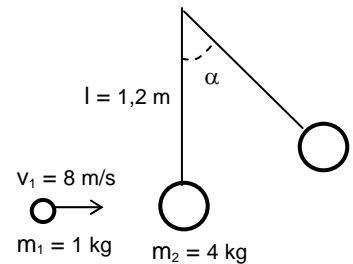
Ja tenim un sistema de dues equacions ambdues incògnites. El resollem per substitució:

$$(8 - v')^2 + v'^2 = 40 \rightarrow v'^2 - 8v' + 12 = 0 \rightarrow \begin{cases} v' = 6 \text{ m/s} \\ v' = 2 \text{ m/s} \end{cases} \text{ Com que salta endavant, la velocitat final del noi}$$

només pot ser: $v' = 6 \text{ m/s}$. Llavors la de la vagoneta és: $V' = 8 - v' = 8 - 6 = 2 \text{ m/s}$

2. Una bola $m_1 = 1 \text{ kg}$ va a 8 m/s en direcció horitzontal i xoca elàsticament amb la massa $m_2 = 4 \text{ kg}$ d'un pèndol de longitud $l = 1,2 \text{ m}$ que està en repòs.

Calcula: a) Velocitats v'_1 de la bola i v'_2 de la massa del pèndol després del xoc.
 b) Angle final que fa el pèndol amb la vertical després del xoc.
 c) Tensió del fil quan el pèndol torni a la posició més baixa.



a) Farem servir les dues equacions del xoc elàstic:

La de la quantitat de moviment:

$$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v'_1 + m_2v'_2$$

i la de les velocitats:

$$v_1 + v'_1 = v_2 + v'_2$$

$$1 \cdot 8 + 0 = 1v'_1 + 4v'_2$$

$$8 + v'_1 = 0 + v'_2 \rightarrow v'_2 = 8 + v'_1$$

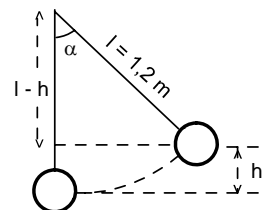
Substituint v'_2 a la primera equació, tenim: $v'_1 + 4(8 + v'_1) = 8 \rightarrow 5v'_1 = -24 \rightarrow \begin{cases} v'_1 = -4,8 \text{ m/s} \\ v'_2 = 3,2 \text{ m/s} \end{cases}$

b) Després del xoc, la massa m_2 del pèndol puja a una certa altura h . Calcularem aquesta altura, tenint present que es conserva l'energia:

$$U_{c(inicial)} = U_{p(final)} \rightarrow \frac{1}{2}m_2v_2^2 = m_2gh \rightarrow h = \frac{v_2^2}{2g} = \frac{3,2^2}{2 \cdot 10} = 0,512 \text{ m}$$

Ara, mirant la figura, calcularem l'angle α :

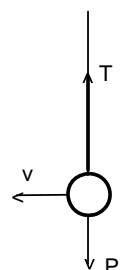
$$\alpha = \arccos \frac{l-h}{l} = \arccos \frac{1,2-0,512}{1,2} = 29,83^\circ$$



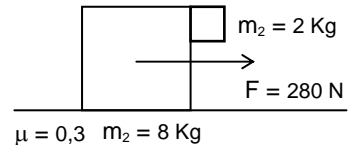
c) Quan passa pel punt més baix hi ha dues forces: La tensió del fil T , perpendicular a la velocitat. Aquesta força produirà una acceleració normal i el pes P també perpendicular a la velocitat però oposada a T . La 2ª llei dirà:

$$T - P = ma_n \rightarrow T - mg = ma_n \rightarrow T = mg + ma_n = mg + m \frac{v^2}{r}$$

$$T = 4 \cdot 10 + 4 \frac{3,2^2}{1,2} = 74,13 \text{ N}$$



- 3.** La força $F = 280 \text{ N}$ mou el sistema de la figura de manera que m_2 no cau. Hi ha un fregament amb el terra de $\mu = 0,3$. Calcula:
- L'acceleració del sistema i la força mútua entre els cossos.
 - El coeficient de fregament μ_s estàtic mínim entre els cossos per tal que m_2 no caigui.



a) Primer calcularem la força de fregament amb el terra. Hi intervenen els pesos de tots dos cossos.

$$F_f = \mu(m_1 + m_2)g = 0,3(8 + 2)10 = 30 \text{ N}$$

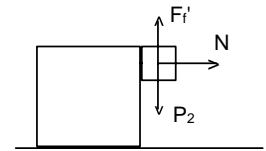
Aplicuem la 2ª llei a tot el sistema i calculem l'acceleració:

$$\boxed{\Sigma F = \Sigma m \cdot a} \rightarrow a = \frac{F - F_f}{m_1 + m_2} = \frac{280 - 30}{8 + 2} = 25 \text{ m/s}^2$$

Aplicuem la 2ª llei al cos petit m_2 : $N = m_2 a = 2 \cdot 25 = 50 \text{ N}$

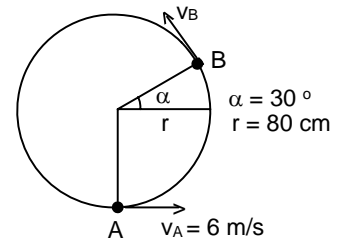
b) Si el cos no cau això és degut a què, com a mínim, la força de fregament F_f' entre els dos cossos iguala el pes P_2 . La força normal N causant del fregament F_f' és la força mútua que acabem de calcular.

Es compleix: $F_f' = P_2 \rightarrow \mu N = m_2 g \rightarrow \mu = \frac{m_2 g}{N} = \frac{2 \cdot 10}{50} = 0,4$



4. Un cos puntual de massa $m = 20 \text{ g}$ fa un moviment circular en un pla vertical lligat al capdavant d'un fil de 80 cm . Quan passa pel punt més baix A, la velocitat és $v_A = 6 \text{ m/s}$. Calcula:

- La velocitat v_B quan es troba en el punt B, pujant, i el fil fa un angle $\alpha = 30^\circ$ per sobre de l'horitzontal.
- La força centrípeta i la tensió del fil en aquest punt B.
- Dibuixa i calcula les acceleracions tangencial, normal i total en aquest punt B.



a) Es conserva l'energia: $U_B = U_A \rightarrow \frac{1}{2}mv_B^2 + mgh_B = \frac{1}{2}mv_A^2 + mgh_A \rightarrow v_B = \sqrt{v_A^2 + 2g(h_A - h_B)}$

Necessitem les altures: $h_A = 0$ i $h_B = r + r \sin \alpha = 0,8 + 0,8 \sin 30^\circ = 0,8 + 0,4 = 1,2 \text{ m}$

La velocitat v_B serà: $v_B = \sqrt{v_A^2 + 2g(h_A - h_B)} = \sqrt{6^2 + 2 \cdot 10(0 - 1,2)} = \sqrt{12} = 3,46 \text{ m/s}$

b) Com que sabem la massa m del cos, la velocitat v i el radi r , ja podem calcular la força centrípeta:

$$\boxed{F_c = m \frac{v^2}{r}} \rightarrow F_c = m \frac{v^2}{r} = 0,02 \frac{12}{0,8} = 0,3 \text{ N}$$

Les forces reals que rep el cos són: només el pes P , i la tensió del fil T . Hem de dibuixar aquestes forces i així veiem que el pes P s'ha de descompondre en els components normal F_n i tangencial F_t .

$$F_n = mg \sin \alpha = 0,02 \cdot 10 \cdot \sin 30^\circ = 0,1 \text{ N}$$

$$F_t = mg \cos \alpha = 0,02 \cdot 10 \cdot \cos 30^\circ = 0,1732 \text{ N}$$

La força normal F_n i la tensió T del fil són perpendiculars a la velocitat. Li fan variar la direcció, és a dir, li produeixen l'acceleració normal. Sumades són la força centrípeta F_c . La força tangencial F_t fa variar el mòdul de la velocitat, produeix l'acceleració tangencial.

Ja podem calcular la tensió del fil: $F_c = F_n + T \rightarrow T = F_c - F_n = 0,3 - 0,1 = 0,2 \text{ N}$

c) Cal mirar la figura on hem dibuixat les forces i ja podem calcular i dibuixar les acceleracions:

$$a_t = \frac{F_t}{m} = \frac{0,1732}{0,02} = 8,66 \text{ N} \text{ contrària a la velocitat, la podem considerar negativa.}$$

$$a_n = \frac{v^2}{r} = \frac{12}{0,8} = 15 \text{ m/s}^2 \text{ o també: } a_n = \frac{F_c}{m} = \frac{T + F_n}{m} = \frac{0,3}{0,02} = \frac{0,2 + 0,1}{0,02} = 15 \text{ m/s}^2$$

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2} = \sqrt{15^2 + 8,66^2} = 17,32 \text{ m/s}^2$$

