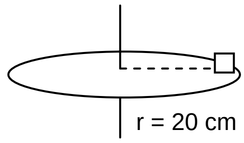
1. Posem un dau a 20 cm de l'eix de rotació d'un disc horitzontal. El disc es posa a rodar amb un MCUV i just quan ha fet una volta el dau rellisca i cau. Entre el dau i el disc hi ha un coeficient de fregament estàtic μ_S = 0,5. Calcula:

a) Velocitat angular del disc a l'instant en què cau el dau.

b) Acceleració angular del disc, acceleracions normal i tangencial del dau i temps a l'instant de caure.



a) El dau fa un MCUV (moviment circular uniformement variat) com el disc. La força centrípeta F_c que fa girar el dau és la força de fregament estàtic F_f que hi ha entre el dau i el disc. Aquesta força augmenta a mesura que augmenta la velocitat angular ω del disc, fins que la força centrípeta iguala el valor màxim de la força de fregament estàtic. Tindrem:

$$\boxed{\begin{array}{l} F_c = m\omega^2 r \\ F_f = \mu m g \end{array}} \rightarrow F_c = F_f \rightarrow m\omega^2 r = \mu m g \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{\mu\ g}{r}} = \sqrt{\frac{0{,}5\cdot 10}{0{,}2}} = 5\ rad/s$$

b) Si ha fet una volta és que ha recorregut un angle $\Delta\varphi = 2\pi$ rad. També sabem la velocitat inicial $\omega_o = 0$ i la final ω = 5 rad/s. Llavors amb la fórmula dels quadrats, tenim l'acceleració angular:

$$\boxed{\omega^2 = \omega_o{}^2 + 2\alpha\Delta\varphi} \rightarrow \alpha = \frac{\omega^2 - \omega_o{}^2}{2\cdot\Delta\varphi} = \frac{5^2 - 0}{2\cdot 2\pi} = 2\ rad/s^2$$

Ara calculem l'acceleració normal del dau: $\boxed{a_n = \omega^2 r} \rightarrow a_n = \omega^2 r = 5^2\cdot 0{,}2 = 5\ m/s^2$

I l'acceleració tangencial: $\boxed{a_t = \alpha\ r} \rightarrow a_t = \alpha\ r = 2\cdot 0{,}2 = 0{,}4\ m/s^2$

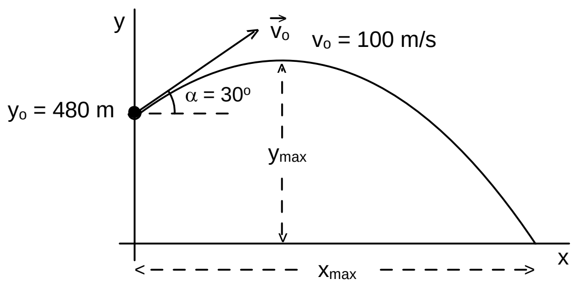
També podem calcular el temps: $\boxed{\omega = \omega_o + \alpha t} \rightarrow t = \frac{\omega - \omega_o}{\alpha} = \frac{5-0}{2} = 2{,}5\ s$

---

2. Des d'una altura inicial de 480 m disparem un projectil amb una velocitat inicial de 100 m/s i una inclinació de 30°. Calcula:

a) Altura màxima i abast del projectil.

b) Acceleració normal, acceleració tangencial i radi de curvatura quan han passat 10 segons.



Primer fem el dibuix del projectil amb les dades del problema i calculem la velocitat inicial:

$$\vec{v}_o = (100\cos 30^0,\ 100\sin 30^0) = (86'6,\ 50)\ m/s$$

Ara el vector de posició i el vector velocitat:

$$\vec{r}\ \left|\begin{array}{l} x = 86{,}6t \\ y = 480 + 50t - 5t^2 \end{array}\right. \qquad \vec{v}\ \left|\begin{array}{l} v_x = 86{,}6 \\ v_y = 50 - 10t \end{array}\right.$$

Ja podem resoldre les preguntes:

a) L'altura màxima implica que el component vertical de la velocitat sigui zero:

$$v_y = 0 \rightarrow 50 - 10t = 0 \rightarrow t = 5\ s \qquad y_{max} = y_{t=5} = 480 + 50\cdot 5 - 5\cdot 5^2 = 605\ m$$

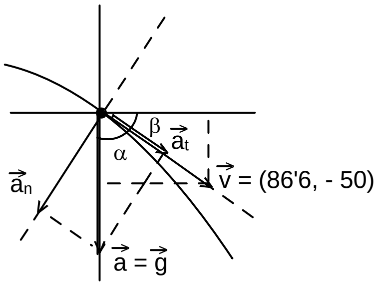
L'abast és el valor màxim de la x. És el valor de la x quan y = 0:

$$y = 0 \rightarrow 480 + 50t - 5t_2 = 0 \rightarrow t^2 - 10t - 96 = 0 \rightarrow \left|\begin{array}{l} t' = 16\ s \text{ (solució vàlida)} \\ t'' = -6\ s \text{ (6 segons abans de sortir era a } y = 0) \end{array}\right.$$

$$x_{max} = x_{y=0} = x_{t=16} = 86{,}6\cdot 16 = 1.385{,}6\ m$$

b) Primer calcularem la velocitat per t = 10 s: $\vec{v} = (86'6,\ 50 - 10t) = (86'6,\ 50 - 10\cdot 10) = (86'6,\ -50)\ m/s$

L'acceleració ja la sabem: $\vec{a} = \vec{g} = (0,\ -10)\ \ m/s^2$.



Dibuixarem la velocitat i l'acceleració en aquest punt de la trajectòria en què t = 10 s. Veiem que l'acceleració total és $\vec{g}$. Projectant $\vec{g}$ sobre la tangent obtindrem l'acceleració tangencial $\vec{a}_t$ i projectant-la sobre la normal obtindrem l'acceleració normal $\vec{a}_n$.

Per això ens cal saber l'angle α. Ho podem fer de dues maneres:

Buscant primer l'angle β:

$\beta = arctg\, \frac{50}{86{,}6} = 30^o$ i restant de 90° $\alpha = 90^o - 30^o = 60^o$

O bé amb la fórmula de l'angle entre dos vectors: $a = \arccos \frac{\vec{v}\ \vec{a}}{v\ a} = \arccos \frac{(86'6,\ -50)(0,\ -10)}{100{\cdot}10} = 60^o$

Ja podem calcular l'acceleració normal: $a_n = a \sin \alpha = 10 \sin 60^o = 8{,}7 m/s^2$

i l'acceleració tangencial: $a_t = a \cos \alpha = 10 \cos 60^o = 5\ \ m/s^2$

Per trobar el radi de curvatura, necessitem el mòdul de la velocitat: $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{86{,}6^2 + 50^2} = 100\ \ m/s$

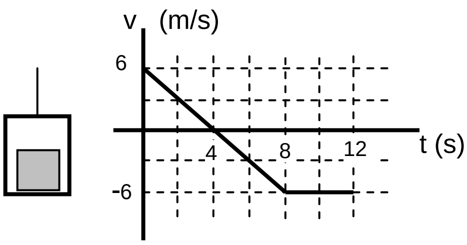
I com que l'acceleració normal és: $\boxed{a_n = \frac{v^2}{R}}$ → tenim el radi: $R = \frac{v^2}{a_n} = \frac{100^2}{8{,}7} = 1.149{,}4\ \ m$

---

3. Un mòbil fa un moviment vertical i la seva velocitat és la del gràfic. La posició inicial és y_o = 20 m.

a) Calcula la posició quan t = 4 s i t = 12 s. i l'acceleració a cada tram.

b) Si el mòbil que fa el moviment és una caixa m_1 = 8 kg amb un cos m_2 = 2 kg a dins, calcula la tensió del fil i la força de contacte entre aquests dos cossos quan t = 2 s.



a) L'espai recorregut és l'àrea del gràfic.

Àrea de cada quadret: 2·3 = 6 m

t = 4 s: Espai recorregut de t = 0 a t = 4 s:

Δy = 2·6 = 12 m; (fa 12 m amunt) Posició quan t = 4 s: y = y_o + Δy = 20 + 12 = 32 m

t = 12 s: Espai recorregut de t = 0 a t = 12 s:

Δy = 2·6 + 2(-6) + 4(-6) = - 24 m; Posició quan t = 12 s: y = y_o + Δy = 20 + (-24) = -4 m

L'acceleració és el pendent:

- Entre t = 0 i t = 4s: $a = \frac{0-6}{4-0} = -1{,}5\ \ m/s^2$.

La velocitat és positiva i l'acceleració negativa. El mòbil puja frenant. És un moviment rectilini uniformement retardat. MRUR.

- Entre t = 4 s i t = 8 s: L'acceleració és la mateixa: a = - 1'5 m/s^2. (Hi ha el mateix pendent)

La velocitat és negativa i l'acceleració també. El mòbil baixa accelerant. És un moviment rectilini uniformement accelerat. MRUA.

b) La tensió del fil quan t = 2 s:

Tinguem present que m és la massa total m = m_1 + m_2 = 8 + 2 = 10 kg i que no més hi ha dues forces: el pes total P i la tensió del fil T. Podem fer el problema de dues maneres:

1. Tenint en compte tots els signes: T + P = ma → T = - mg – ma = -10(-10) – 10(-1,5) = 85 N

2. Suposant que les acceleracions són positives, tant la dels cossos com la de la gravetat. Com que puja frenant, P > T i tindrem:

P – T = ma → T = mg – ma = 10·10 – 10·1,5 = 85 N

La força mútua

L'obtindrem aplicant la 2ª llei al cos m_2 = 2 kg que va a dins de la caixa. Aquest cos rep dues forces, el seu pes P_2 (avall) i la força F (amunt) que li fa la caixa (és la força mútua que busquem). Aquí també podem fer el problema de dues maneres:

1. Tenint en compte tots els signes de les acceleracions:

F + P_2 = m_2 a → F = -m_2g + m_2a = -2(-10) + 2(-1,5) = 17 N

2. Suposant que les acceleracions són positives. Com que puja frenant, P_2 > F

$P_2 - F = m_2 a \rightarrow F = m_2 g - m_2 a = 2·10 - 2·1{,}5 = 17$ N

També podem aplicar la 2ª llei a la caixa m_1. La caixa rep tres forces: el pes P_1, la força mútua F, aquestes dues avall, i la tensió del fil T, amunt. Hi ha dues maneres de fer, com abans.

1. Tenint en compte tots els signes de les acceleracions:

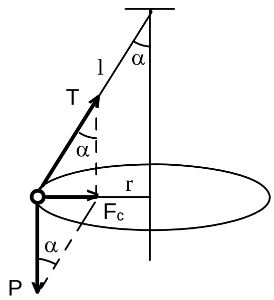
$$T + P_1 + F = m_1 a \rightarrow F = -m_1 g + m_1 a - T = -8(-10) + 8(-1{,}5) - 85 = -17 \text{ N}$$

2. Suposant que les acceleracions són positives. Com que puja frenant, $P_2 + F > T$

$$P_1 + F - T = m_1 a \rightarrow F = m_1 a - m_1 g + T = 8·1{,}5 - 8·10 + 85 = 17 \text{ N}$$

---

4. Un pèndol cònic té una longitud de 80 cm i una massa de 20 g i gira amb un radi de 30 cm. Calcula:
a) La força centrípeta. b) La tensió del fil. c) El període de rotació i la freqüència en r.p.m.



a) La massa del pèndol fa un MCU (moviment circular uniforme). Les forces reals que rep la massa del pèndol són només el pes P i la tensió T del fil. Aquestes dues forces sumades vectorialment donen la força centrípeta F_c normal a la trajectòria i perpendicular a la velocitat. Aquesta força és la que fa que la massa tingui un MCU. Tot passa com si T i P no existissin i només hi hagués F_c. Mirant la figura, de seguida trobarem el valor de la força centrípeta F_c .

Calculem primer l'angle α: $\alpha = \arcsin\frac{r}{l} = \arcsin\frac{30}{80} = 22^o$

$$tg\alpha = \frac{F_c}{P} \rightarrow F_c = mgtg\alpha = 0{,}02·10·tg22^o = 0{,}08 \ N$$

b) També amb la figura: $\cos\alpha = \frac{P}{T} \rightarrow T = \frac{P}{\cos\alpha} = \frac{mg}{\cos\alpha} = \frac{0{,}02·10}{\cos 22^o} = 0{,}216 \ N$

c) Escrivim la 2ª llei: $\boxed{\begin{matrix} F = m\frac{v^2}{r} \\ v = \omega r \end{matrix}} \rightarrow \boxed{F_c = m\omega^2 r} \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{F_c}{mr}} = \sqrt{\frac{0{,}08}{0{,}02·0{,}3}} = 3{,}65 \ rad/s$

Amb la velocitat angular ω ja podem calcular el període: $\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}} \rightarrow T = \frac{2\pi}{3{,}65} = 1{,}72 \ s$

I la freqüència: $\boxed{f = \frac{1}{T}} \rightarrow f = \frac{1}{1{,}72}60 = 34{,}9 \ rpm$

---

5. Un cos de massa m = 20 kg va per un pla horitzontal. Entre el cos i el pla hi ha un coeficient de fregament μ = 0,2. Quan la seva velocitat és de 4 m/s, li fem una força $F = 400 - 60x^2$ N i m. La força actua en la mateixa direcció i sentit que la velocitat al llarg d 'un tros x = 3 m. Calcula la velocitat que agafa el cos per causa d'aquesta força que li fem.

Com que la força és variable, l'acceleració també ho és i no podem fer el problema de la forma usual de calcular primer l'acceleració amb la segona llei i després per cinemàtica del MRUV respondre les preguntes que ens fan. Caldrà resoldre el problema amb el <u>teorema de les forces vives</u>: "El treball que rep un cos lliure li fa variar l'energia cinètica".

Primer calcularem el treball que fa la força F en aquests 3 m. Caldrà fer la integral del treball:

$$W = \int_o^x Fdx = \int_o^3 (400 - 60x^2)dx = \left[400x - 20x^3\right]_0^3 = 400·3 - 20·3^3 = 1.200 - 540 = 660 \ J$$

Ara calculem el treball que es dissipa en forma de calor pel fregament:

$$F_f = \mu mg = 0{,}2·20·10 = 40 \ N \rightarrow W_f = F_f x = 40·3 = 120 \ J$$

El treball que rep el cos i que li fa variar l'energia cinètica és: $\Delta U_c = W - W_f = 660 - 120 = 540 \ J$

L'energia cinètica final serà: $U_c = U_{c,o} + \Delta U_c = \frac{1}{2}mv_o^2 + \Delta U_c = \frac{1}{2}20·4^2 + 540 = 160 + 540 = 700 \ J$

I la velocitat final: $v = \sqrt{\frac{2U_c}{m}} = \sqrt{\frac{2·700}{20}} = 8{,}37 \ m/s$
