1. El radi d'un planeta és R = 4.000 km i sabem que la velocitat d'escapament des de la seva superfície és v = 8.000 m/s. Estant en aquest planeta, disparem un projectil des d'una altura de 225 m amb una velocitat horitzontal de 40 m/s. Calcula: a) La gravetat g a la superfície del planeta.

b) L'abast del projectil i la velocitat quan arriba a terra.

c) La massa del planeta. - *Sabem la constant de gravitació:* $G = 6{,}7 \cdot 10^{-11}\ N \cdot m^2/Kg^2$

a) La velocitat d'escapament és la velocitat mínima que ha de tenir el cos per tal que surti del camp gravitatori. L'energia final serà zero: la potencial perquè estarà fora del camp i la cinètica perquè l'hem disparat amb la velocitat mínima, just per sortir del camp gravitatori. Escriurem que l'energia es conserva:

$$U_{c,o} + U_{p,o} = 0 \rightarrow \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{R} = 0 \rightarrow \boxed{v = \sqrt{\frac{2GM}{R}}}$$ i ja tenim la fórmula per calcular la velocitat d'escapament

Però nosaltres no sabem la massa del planeta. Farem el següent:

A la superfície del planeta: $$\boxed{g = G\frac{M}{R^2}} \rightarrow GM = gR^2 \rightarrow v = \sqrt{\frac{2gR^2}{R}} \rightarrow \boxed{v = \sqrt{2gR}}$$

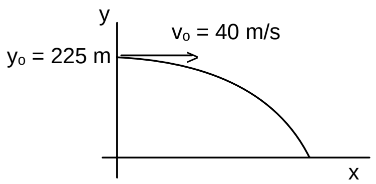
Amb aquesta segona fórmula ja podem calcular la g: $$g = \frac{v^2}{2R} = \frac{8.000^2}{2 \cdot 4 \cdot 10^6} = 8\ m/s^2$$

També hauríem pogut calcular primer la massa M del planeta amb la primera fórmula:

$$M = \frac{v^2 R}{2G} = \frac{8.000^2 \cdot 4 \cdot 10^6}{2 \cdot 6{,}7 \cdot 10^{-11}} = 1{,}91 \cdot 10^{24}\ kg$$ i amb la segona la gravetat: $$g = G\frac{M}{R^2} = 6{,}7 \cdot 10^{-11}\frac{1{,}91 \cdot 10^{24}}{(4 \cdot 10^6)^2} = 8\ m/s^2$$

---

b) Fem les equacions del projectil oblic. Caldrà agafar g = -8 m/s^2.



Les constant són: $\vec{r}_o = (0,\ 225)\ m$; $\vec{v}_o = (40,\ 0)\ m/s$; $\vec{a} = (0, -8)\ m/s^2$

La posició: $\vec{r}\ \left| \begin{array}{l} x = 40t \\ y = 225 - 4t^2 \end{array} \right.$ la velocitat: $\vec{v}\ \left| \begin{array}{l} v_x = 40 \\ v_y = -8t \end{array} \right.$

quan arriba a terra y = 0: $0 = 225 - 4t^2$ → temps: $t = \sqrt{\frac{225}{4}} = 7{,}5\ s$ → abast: $x = 40 \cdot 7{,}5 = 300\ m$

→ velocitat: $\vec{v} = (40,\ -8 \cdot 7{,}5) = (40,\ -60)\ m/s$

c) La massa del planeta la calcularem amb la fórmula de la gravetat g a la superfície del planeta:

$$g = G\frac{M}{R^2} \rightarrow M = \frac{gR^2}{G} = \frac{8 \cdot (4 \cdot 10^6)^2}{6{,}7 \cdot 10^{-11}} = 1{,}91 \cdot 10^{24}\ Kg$$

---

2. Un satèl·lit gira a una altura igual al doble del radi de la terra. Calcula:

a) La velocitat de rotació.

b) El temps que tarda a fer una volta.

- Només tenim les dades següents: R_T = 6.400 km i g = 10 m/s^2. Es suposa que no es coneix la constant G ni la massa M de la terra.

a) Primer hem de calcular el radi de l'òrbita: $r = R + h = R + 2R = 3R$

És un MCU. Igualant la llei de la gravitació amb la segona llei en un MCU, tenim:

$$G\frac{Mm}{r^2} = m\frac{v^2}{r}$$ i ja podem calcular la velocitat $$v = \sqrt{\frac{GM}{r}} = \sqrt{\frac{gR^2}{3R}} = \sqrt{\frac{gR}{3}} = \sqrt{\frac{10 \cdot 6{,}4 \cdot 10^6}{3}} = 4.618{,}80\ m/s$$

b) Podem buscar el període amb la llei de la gravitació universal i la segona llei:

$$G\frac{Mm}{r^2} = m\frac{4\pi^2}{T^2}r \rightarrow GMT^2 = 4\pi^2 r^3 \rightarrow gR^2T^2 = 4\pi^2(3R)^3 \rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{27R}{g}} = \sqrt{\frac{27 \cdot 6{,}4 \cdot 10^6}{10}} = 26.118'7\ s$$

També tenint present que és un MCU: $$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{v/r} = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi 3R}{v} = \frac{2\pi 3 \cdot 6{,}4 \cdot 10^6}{4.618{,}80} = 26.118'7\ s = 7h,\ 15\min,\ 19s$$

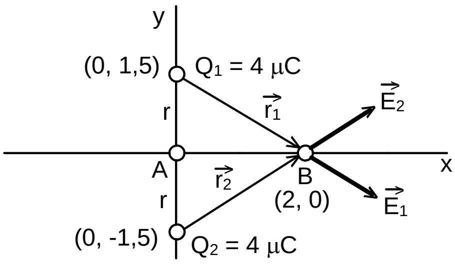
---

3. Un camp elèctric és creat per dues càrregues puntuals iguals. $Q_1 = Q_2 = 4\ \mu C$ situades, Q_1 al punt (0, 1'5) m i Q_2 al punt (0, -1'5) m. Des de molt lluny, de fora del camp, des del punt $(-\infty,\ 0)$, disparem una partícula de massa m = 30 mg carregada amb q = 2 μC amb una velocitat inicial $\vec{v}_o = (100,\ 0)\ m/s$. Calcula:

a) La intensitat de camp $\vec{E}_B$ al punt B(2, 0) m, la força que rep la partícula i l'acceleració que té quan es troba en aquest punt B.
b) El potencial V_A al punt A(0, 0) i el V_B al punt B(2, 0) m i l'energia potencial de la partícula a cada un d'aquests punts.
c) La velocitat v_A que tindrà quan passi pel punt A(0, 0) i la v_B quan passi pel punt B(2, 0) m.

- La constant de la llei de Coulomb: $K = 9{\cdot}10^9\ N{\cdot}m^2/C^2$.

a) Per trobar $\vec{E}_B$ primer hem de calcular els vectors i els seus mòduls:



$\vec{r}_1 = [(2,0)-(0,\ 1'5)] = (2,-1'5)\ m \qquad r_1 = \sqrt{2^2 + (-1'5)^2} = 2,5\ m$

$\vec{r}_2 = [(2,0)-(0,-1'5)] = (2,\ 1'5)\ m \qquad r_2 = \sqrt{2^2 + 1'5^2} = 2,5\ m$

Ja podem calcular les intensitats de camp: $\boxed{\vec{E} = K\dfrac{Q}{r^3}\vec{r}}$

$\vec{E}_1 = K\dfrac{Q_1}{r_1^{\,3}}\vec{r}_1 = 9{\cdot}10^9\ \dfrac{4{\cdot}10^{-6}}{2,5^3}(2,-1'5) = (4.608,\ -3.456)\ N/C$ i anàlogament, $\vec{E}_2 = (4.608,\ 3.456)\ N/C$

La intensitat total: $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = (4.608,\ -3.456) + (4.608,\ 3.456) = (9.216,\ 0)\ N/C$ i el mòdul: $E = 9.216\ N/C$

La força serà: $F = qE = 2{\cdot}10^{-6}{\cdot}9.216 = 0,0184\ N$ i l'acceleració: $a = \dfrac{F}{m} = \dfrac{0,0184}{30{\cdot}10^{-6}} = 614,4\ m/s^2$

b) El potencial, tant al punt A com al punt B, serà la suma de dos potencials iguals
Perquè les càrregues i les distàncies són iguals: $\boxed{V = K\dfrac{Q}{r}}$

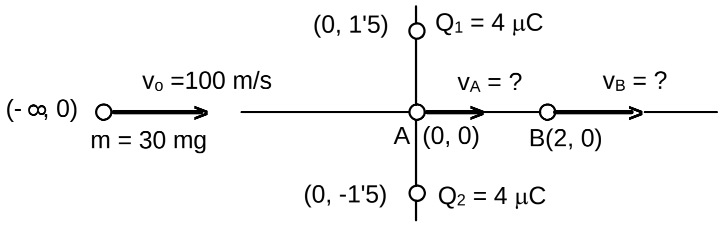
Al punt A: $V_A = V_1 + V_2 = 2V_1 = 2K\dfrac{Q_1}{r} = 2{\cdot}9{\cdot}10^9\ \dfrac{4{\cdot}10^{-6}}{1,5} = 48.000\ V$

i l'energia potencial: $U_{p,A} = qV_A = 2{\cdot}10^{-6}{\cdot}48.000 = 0,0960\ J$

Al punt B: $V_B = V_1' + V_2' = 2V'_1 = 2K\dfrac{Q_1}{r'_1} = 2{\cdot}9{\cdot}10^9\ \dfrac{4{\cdot}10^{-6}}{2,5} = 28.800\ V$

i l'energia potencial: $U_{p,B} = qV_B = 2{\cdot}10^{-6}{\cdot}28.800 = 0,0576\ J$

c) Calculem primer l'energia inicial. Com que es troba fora del camp, només tindrà energia cinètica:



$U_c = \dfrac{1}{2}mv^2 = \dfrac{1}{2}30{\cdot}10^{-6}{\cdot}100^2 = 0,150\ J$

Com que l'energia es conserva, la partícula sempre tindrà una energia total U = 0,150 J.

L'energia cinètica al punt A serà la diferència entre la total i la potencial:

$U_{c,A} = U - U_{p,A} = 0,150 - 0,096 = 0,054\ J$ I la velocitat: $v_A = \sqrt{\dfrac{2U_{c,A}}{m}} = \sqrt{\dfrac{2{\cdot}0,054}{30{\cdot}10^{-6}}} = 60\ m/s$

Anàlogament l'energia cinètica al punt B serà també la diferència entre la total i la potencial:

$U_{c,B} = U - U_{p,B} = 0,1500 - 0,0576 = 0,0924\ J$ I la velocitat: $v_A = \sqrt{\dfrac{2U_{c,B}}{m}} = \sqrt{\dfrac{2{\cdot}0,924}{30{\cdot}10^{-6}}} = 78,5\ m/s$

4. Una esfera massissa, carregada, en equilibri, té un radi R = 18 cm i un potencial V = 400 V. Calcula:

a) Intensitat de camp i potencial en un punt A interior, situat a la distància r_A = 10 cm del centre fde l'esfera i en un altre punt B exterior, situat a la distància r_B = 24 cm del centre de l'esfera.

b) Energia i capacitat de l'esfera.

- La constant de la llei de Coulomb: $K = 9\cdot10^9\ N\cdot m^2/C^2$.

a) A dins d'un conductor carregat en equilibri la intensitat de camp és zero. Si està en equilibri no hi pot haver cap força, la resultant de totes és zero a tots els punts. Per tant: $E_A = 0$.

El potencial és el mateix a tots els punts i és el propi de l'esfera: $V_A = V_{esfera} = 400\ V$

Pels punts exteriors a una esfera, tant la intensitat de camp com el potencial, es demostra que es calculen com si tota la càrrega de l'esfera estigués concentrada al seu centre. Calculem primer la càrrega de l'esfera:

El potencial és: $\boxed{V = K\frac{Q}{R}}$ i la càrrega: $Q = \frac{VR}{K} = \frac{400\cdot 0{,}18}{9\cdot10^9} = 8\cdot10^{-9}\ C = 8\ nC$

Ja podem calcular la intensitat de camp al punt B.

$E = K\frac{Q}{r^2} = 9\cdot10^9\frac{8\cdot10^{-9}}{0{,}24^2} = 1.250\ N/C$ i el potencial $V = K\frac{Q}{r} = 9\cdot10^9\frac{8\cdot10^{-9}}{0{,}24} = 300\ V$

b) L'energia potencial d'una esfera és: $\boxed{U = \frac{1}{2}QV}$ → $U = \frac{1}{2}QV = \frac{1}{2}8\cdot10^{-9}\cdot400 = 1{,}6\cdot10^{-6}\ J$

i la capacitat d'una esfera: $\boxed{C = \frac{r}{K}}$ → $C = \frac{r}{K} = \frac{0{,}18}{9\cdot10^9} = 2\cdot10^{-11}\ F = 20\cdot10^{-12}\ F = 20\ pF$

També es pot calcular amb el concepte de capacitat: $\boxed{C = \frac{Q}{V}}$ → $C = \frac{Q}{V} = \frac{8\cdot10^{-9}}{400} = 2\cdot10^{-11}\ F = 20\ pF$