1. La velocitat d'un satèl·lit de m = 200 kg en òrbita estable sobre l'equador és v = 5.800 m/s. Calcula:

a) L'altura del satèl·lit en km.
b) El període de rotació en hores minuts i segons.
c) L'energia cinètica, la potencial i la total i l'energia que ha estat necessària per posar-lo en òrbita.

Dades: G = 6,7·10^{-11} Nm^2/kg^2, M = 6·10^{24} kg, R = 6.400 km.

a) El satèl·lit compleix la 2^a llei de Newton: → $\boxed{F = ma}$ Com que fa un MCU, l'acceleració és la normal: → $\boxed{a_n = \frac{v^2}{r}}$

La força que el manté en òrbita es cacula amb la llei de la gravitació universal: → $\boxed{F = G\frac{Mm}{r^2}}$

Podem fer el planteig següent: $G\frac{Mm}{r^2} = m\frac{v^2}{r}$ → $r = \frac{GM}{v^2} = \frac{6{,}7\cdot10^{-11}\cdot6\cdot10^{24}}{5.800^2} = 11{,}95\cdot10^6\ m = 11.950\ km$

b) El període d'un MCU és: $\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}}$ i la velocitat angular: $\boxed{\omega = \frac{v}{r}}$

Així tenim: $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{v/r} = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi 11{,}95\cdot10^6}{5.800} = 12.946\ s = 3\ h,\ 35\ \min,\ 46\ seg$

c) L'energia cinètica: $U_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}200\cdot5.800^2 = 3{,}36\cdot10^9\ J$

L'energia potencial: $U_p = -2U_c = -2\cdot3{,}36\cdot10^9 = -6{,}72\cdot10^9\ J$ i la total: $U_{total} = -U_c = -3{,}36\cdot10^9\ J$

L'energia necessària per posar el satèl·lit en òrbita serà la total que té ara menys la que tenia quan estava en repòs a la superfície de la terra. Calculem aquesta darrera que serà només energia potencial:

$\boxed{U_p = G\frac{Mm}{r}}$ i si es troba a la superfície: r = R: $U_{p,o} = G\frac{Mm}{R} = -6{,}7\cdot10^{-11}\frac{6\cdot10^{24}}{6{,}4\cdot10^6} = -12{,}56\cdot10^9\ J$

L'energia que busquem serà: $\Delta U = U_{total\ en\ òrbita} - U_{inicial\ a\ terra} = -3{,}36\cdot10^9 - (-12{,}56\cdot10^9) = 9{,}2\cdot10^9\ J$

---

2. Calcula massa d'un planeta si sabem que quan es tira un cos amunt des de la seva superfície amb una velocitat inicial de 60 m/s, tarda 16 segons a tornar a ser a terra. El radi del planeta és R = 5.200 km.

Dades: G = 6,7·10^{-11} Nm^2/kg^2,

És el cas d'un projectil vertical que es mou prop de la superfície. Tenim un MRUV perquè l'acceleració de la gravetat s'ha de considerar constant. Sabem $y_o = 0$; $v_o = 60$ m/s i que quan y = 0 t = 16 s. Calculem l'acceleració de la gravetat:

$\boxed{y = y_o + v_o t + \frac{1}{2}gt^2}$ → $0 = 0 + 60\cdot16 + \frac{1}{2}g16^2$ → $g = -7{,}5\ m/s^2$

També podem fer el mateix càlcul amb la velocitat. Sabem v_o = 60 m/s i que a dalt de tot, v = 0 i t = 8 s.

$\boxed{v = v_o + gt}$ → $0 = 60 + g\cdot8$ → $g = -7{,}5\ m/s^2$

El pes del cos és la força gravitatòria amb què el cos és atret pel planeta. Compleix la 2^a llei: $\boxed{P = mg}$

També podem calcular aquesta força amb la llei de la gravitació: $\boxed{F = G\frac{Mm}{R^2}}$

Igualant aquestes dues expressions trobem la g: $P = F \rightarrow g = G\dfrac{M}{R^2}$ que és l'acceleració de la gravetat en els punts propers a la superfície del planeta.

Calculem la seva massa: $M = \dfrac{gR^2}{G} = \dfrac{7{,}5\cdot(5{,}2\cdot10^6)^2}{6{,}7\cdot10^{-11}} = 3{,}03\cdot10^{24}\ kg$

---

3. Un cos es troba a una altura igual al radi de la terra amb una velocitat de 1.000 m/s pujant. Calcula la velocitat que tindrà quan arribi a terra. *Dades: R = 6.400 km; g = 10 m/s^2. (No sabem ni G ni M)*

Tindrem present que quan un cos es mou pel camp gravitatori l'energia es conserva. No cal considerar ni la direcció ni el sentit de la velocitat. $U_{c,\,final} + U_{p,\,final} = U_{c,inicial} + U_{p,inicial}$

Tenint present que la distància entre el cos i la terra és: r = R + h = R + R = 2R, escriurem:

$$\frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{R} = \frac{1}{2}mv_o^2 - G\frac{Mm}{2R} \rightarrow Rv^2 - 2GM = Rv_o^2 - GM \rightarrow v^2 = \frac{GM + Rv_o^2}{R} = \frac{gR^2 + Rv_o^2}{R}$$

$$v = \sqrt{v_o^2 + gR} = \sqrt{1.000^2 + 10\cdot6{,}4\cdot10^6} = 8.062\ m/s$$

Aquí hem fet servir: $\boxed{GM = gR^2}$

Per deduir aquesta equivalència, només cal considerar un cos de massa M que es trobi a la superfície de la terra, és a dir, a la distància R de la terra (del centre). La força amb què la terra l'atreu és el pes i la 2ª llei diu: $P = F = mg$ i la llei de la gravitació: $F = G\dfrac{Mm}{R^2}$. Igualant aquestes dues expressions, trobem l'equivalència anterior.

---

4. Un satèl·lit de la terra fa una òrbita pel damunt de la línia de l'equador i tarda 18 hores a fer una volta. Si ara es troba sobre la vertical d'un cert punt de la superfície de la terra, quan tardarà a trobar-se sobre aquest mateix punt? a) Si gira en sentit contrari a la terra. b) Si gira en el mateix sentit.

Necessitem la velocitat angular ω_S del satèl·lit i la ω_T de la terra:

$\boxed{\omega = \dfrac{2\pi}{T}}$ → satèl·lit: $\omega_S = \dfrac{2\pi}{T_S} = \dfrac{2\pi}{18} = \dfrac{\pi}{9}\ rad/h = \dfrac{\pi}{9}\ h^{-1}$ → terra: $\omega_T = \dfrac{2\pi}{T_T} = \dfrac{2\pi}{24} = \dfrac{\pi}{12}\ h^{-1}$

a) Podem imaginar que la terra està quieta i el satèl·lit té una velocitat angular que és la suma:

$$\omega' = \omega_S + \omega_T = \frac{\pi}{9} + \frac{\pi}{12} = \frac{4\pi + 3\pi}{36} = \frac{7\pi}{36}\ rad/h$$

El temps demanat serà el període corresponent: $T' = \dfrac{2\pi}{\omega'} = \dfrac{2\pi}{7\pi/36} = \dfrac{72}{7} = 10{,}28\ h = 10h,\ 17\min,\ 8{,}5s$

b) Ara imaginarem que la terra està quieta i el satèl·lit té una velocitat angular que és la diferència:

$\omega' = \omega_S - \omega_T = \dfrac{\pi}{9} - \dfrac{\pi}{12} = \dfrac{4\pi - 3\pi}{36} = \dfrac{\pi}{36}\ rad/h$ → el temps ara serà: $T' = \dfrac{2\pi}{\omega'} = \dfrac{2\pi}{\pi/36} = 72\ h$

Problema previ al problema 4.

Dos cotxes estan separats una distància de 240 km. L'un va a 120 km/h i l'altre a 80 km/h. Calcula el temps que tarden a trobar-se:
a) Si van en sentits contraris. b) Si el primer persegueix el segon.

a) Podem imaginar que l'un està parat i l'altre va a $v = v_1 + v_2 = 120 + 80 = 200$ km/h. → $t = \dfrac{\Delta x}{v} = \dfrac{240}{200} = 1{,}2\ h$

b) És com si el primer estigués parat i l'altre anés a $v = v_1 - v_2 = 120 - 80 = 40$ km/h → $t = \dfrac{\Delta x}{v} = \dfrac{240}{40} = 6\ h$
